

G-6 II・B
第1講

指数関数①

※書きこみはせず、ノートに問題を写して解きましょう。

Grade 1

指数法則

ポイント 指数法則

$$a^x \times a^y = a^{x+y} \quad a^x \div a^y = a^{x-y} \quad (a^x)^y = a^{xy}$$

$$(ab)^n = a^n b^n \quad a^0 = 1 \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

例題 次の計算をせよ。

(1) $32^{\frac{2}{5}}$

(2) $81^{-\frac{3}{4}}$

(3) $(8 \div 5^{-2})^{-2} \times (4^{-1} \times 5^{-2})^{-3}$

(4) $4^{\frac{2}{3}} \div 24^{\frac{1}{3}} \times 18^{\frac{2}{3}}$

(1) $32^{\frac{2}{5}} = (2^5)^{\frac{2}{5}} = 2^2 = 4$

(2) $81^{-\frac{3}{4}} = (3^4)^{-\frac{3}{4}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$

(3)
$$\begin{aligned} & (8 \div 5^{-2})^{-2} \times (4^{-1} \times 5^{-2})^{-3} \\ &= (2^3 \div 5^{-2})^{-2} \times (2^{-2} \times 5^{-2})^{-3} \\ &= 2^{-6} \div 5^4 \times 2^6 \times 5^6 \\ &= 2^{-6+6} \times 5^{-4+6} \\ &= 2^0 \times 5^2 = 25 \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} & 4^{\frac{2}{3}} \div 24^{\frac{1}{3}} \times 18^{\frac{2}{3}} \\ &= (2^2)^{\frac{2}{3}} \div (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \times (2 \times 3^2)^{\frac{2}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}} \div (2^1 \times 3^{\frac{1}{3}}) \times 2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{4}{3}} \\ &= 2^{\frac{4}{3}-1+\frac{2}{3}} \times 3^{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}} \\ &= 2^1 \times 3^1 = 6 \end{aligned}$$

解法の要点

指数の計算

- ①底をそろえる
- ②素因数分解

Grade 2 累乗根

ポイント 累乗根

$\sqrt[n]{a}$ … n 乗すると a になる数

$\sqrt[n]{a}$ を $a^{\frac{1}{n}}$ と定義する。 $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$ である。

例題 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{a^3} \sqrt[4]{a^6}$

(2) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^5}}}$

(3) $\sqrt{2} \times \sqrt[4]{2^5} \div \sqrt{\sqrt{2^3}}$

(4) $\sqrt[4]{64} \div \sqrt[6]{72} \times \sqrt[3]{24}$

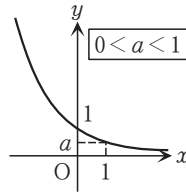
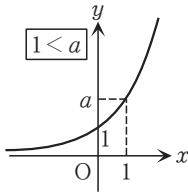
$$\begin{aligned}(1) \quad \sqrt{a^3} \sqrt[4]{a^6} &= a^{\frac{3}{2}} \times a^{\frac{6}{4}} \\ &= a^{\frac{3}{2} + \frac{3}{2}} = a^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^5}}} &= \sqrt{\sqrt{a^{\frac{5}{2}}}} = \sqrt{(a^{\frac{5}{2}})^{\frac{1}{2}}} \\ &= (a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{5}{8}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \sqrt{2} \times \sqrt[4]{2^5} \div \sqrt{\sqrt{2^3}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{4}} \div \sqrt{2^{\frac{3}{2}}} \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{4}} \div 2^{\frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{1}{2} + \frac{5}{4} - \frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{7}{4} - \frac{3}{4}} \\ &= 2^{\frac{4}{4}} = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) \quad \sqrt[4]{64} \div \sqrt[6]{72} \times \sqrt[3]{24} \\ &= 64^{\frac{1}{4}} \div 72^{\frac{1}{6}} \times 24^{\frac{1}{3}} \\ &= (2^6)^{\frac{1}{4}} \div (2^3 \times 3^2)^{\frac{1}{6}} \times (2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{2}} \div (2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}}) \times 2^1 \times 3^{\frac{1}{3}} \\ &= 2^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} + 1} \times 3^{-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} \\ &= 2^2 \times 3^0 = 4\end{aligned}$$

ポイント 指数関数の大小

● 指数関数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) のグラフ $x_1 < x_2$ のとき,

$$\text{底 } a \text{ が } 1 < a \iff a^{x_1} < a^{x_2}$$

$$\text{底 } a \text{ が } 0 < a < 1 \iff a^{x_1} > a^{x_2}$$

例題 次の数の大きさを比較せよ。

(1) $3, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt[4]{27}$

(2) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}, \sqrt[5]{\frac{1}{8}}, 1$

(1) $\sqrt{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = 3^{-\frac{1}{2}}$

$\sqrt[4]{27} = 27^{\frac{1}{4}} = (3^3)^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{3}{4}}$

底 $3 > 1$ より,

$$3^{-\frac{1}{2}} < 3^{\frac{3}{4}} < 3$$

$$\therefore \sqrt{\frac{1}{3}} < \sqrt[4]{27} < 3$$

(2) $\sqrt[4]{\frac{1}{4}} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right\}^{\frac{1}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[5]{\frac{1}{8}} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right\}^{\frac{1}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}}$

$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$

底 $\frac{1}{2} < 1$ より,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{5}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$\therefore \sqrt[5]{\frac{1}{8}} < \sqrt[4]{\frac{1}{4}} < 1$$

例題 次の関数の最大値・最小値を求めよ。

(1) $y = 3^x$ ($1 \leq x \leq 3$)

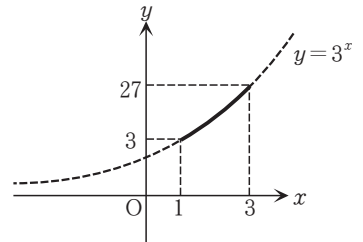
(2) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ ($-1 \leq x \leq 2$)

(3) $y = 2^{2x} - 2^{x+1} - 1$ ($0 \leq x \leq 2$)

(1) グラフより、

最大値 27 ($x=3$)

最小値 3 ($x=1$)



(2) $t = x - 2$ とおくと、

$$-1 \leq x \leq 2 \text{ より、}$$

$$-3 \leq x - 2 \leq 0$$

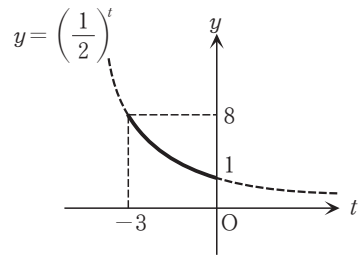
$$\therefore -3 \leq t \leq 0$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^t$$

よってグラフより、

最大値 8 ($t = -3$ すなわち、 $x = -1$)

最小値 1 ($t = 0$ すなわち、 $x = 2$)



(3) $y = (2^x)^2 - 2^x \times 2 - 1$

$$t = 2^x \text{ とおくと、} 0 \leq x \leq 2 \text{ より、}$$

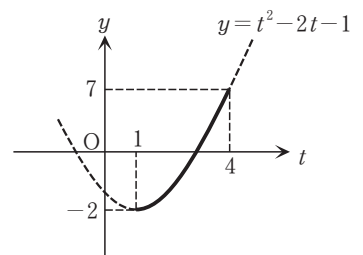
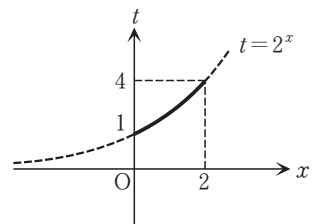
$$1 \leq t \leq 4$$

$$y = t^2 - 2t - 1$$

$$= (t-1)^2 - 2$$

最大値 7 ($t=4$ すなわち、 $x=2$)

最小値 -2 ($t=1$ すなわち、 $x=0$)



■練習問題■

1 次の計算をせよ。

(1) $256^{\frac{3}{4}}$

(2) $27^{-\frac{2}{3}}$

(3) $(3^2 \times 2^{-2})^{-3} \times (3^2 \div 2)^3$

(4) $6^{\frac{2}{3}} \times 12^{\frac{1}{3}} \div 54^{\frac{1}{3}}$

2 次の計算をせよ。

(1) $\sqrt{a^5} \sqrt[4]{a^2}$

(2) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a^3}}}$

(3) $\sqrt[3]{4} \times \sqrt{2} \div \sqrt[3]{\sqrt{2}}$

(4) $\sqrt[6]{54} \times \sqrt[4]{36} \div \sqrt[3]{4}$

3 次の数の大小を比較せよ。

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, 1

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, $4^{-\frac{1}{4}}$, $2^{-\frac{2}{3}}$

4 次の関数の最大値・最小値を求めよ。

(1) $y = 2^x$ ($-1 \leq x \leq 3$)

(2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ($0 \leq x \leq 2$)

(3) $y = 2^{2x} - 2^{x+2} + 3$ ($-1 \leq x \leq 2$)